التوزيعات الاحتمالية

- هناك عدد محدد من التوزيعات الاحتمالية التي تستخدم في كثير من الدراسات الإحصائية. وحيث أن كل واحد من هذه التوزيعات له علاقة بالتوزيعات الأخرى، فإننا سنقوم بتقديمها كمجموعة عوضاً عن استعراض كل واحد منها عندما يحين وقت استعماله في مكان ما .
- والتوزيعات التي سنغطيها هنا هي ذي الحدين والطبيعي، توزيع t ، و F وكاي تربيع (X2) . ولكل منها استعمالات خاصة في مجال البحوث والدراسات العلمية، ولكن يلاحظ أن التوزيع الطبيعي وتوزيع t وإلى حد ما توزيع F هي أكثر هذه التوزيعات استخداماً .

توزيعٍ ذي الحدين

- يسمى غالباً التوزيع الاحتمالي المتقطع بتوزيع ذي الحدين . إذا كانت P احتمال وقوع حدث ما (احتمال النجاح)
- و $q = 1 - p$ احتمال عدم وقوع الحدث (احتمال الفشل)
- فإذا كان احتمال وقوع الحدث X من N من المحاولات، فإن (X) نجاح و (N-X) فشل، وبالتالي فإن احتمال يعطى :

$$P(X) = {}^{N}C_{X} P^{X} q^{N-X}$$

$$= \frac{N!}{X!(N-X)!} P^{X} q^{N-X}$$

- مثال (1) : احتمال الحصول على صورتين بالضبط من ستة رميات لعملة غير متحيزة هو :

$$^{6}C_{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{6-2} = \frac{6!}{2!4!}\left(\frac{1}{2}\right)^{6}$$

$$= \frac{15}{64}$$

- مثال (2) : احتمال الحصول على 4 صورة من ستة رميات لعملة غير متحيزة

$$^{6}C_{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{6-4}$$

التوزيع الطبيعي

- هو أفضل وأكثر التوزيعات الاحتمالية المتصلة استخداماً . ويكمن السبب في ذلك :
  - أن توزيعات كثيرة لمتغيرات مثل الطول والوزن تتبع توزيعات طبيعية .
  - النتيجة الرياضية التي تسمى بنظرية النهاية المركزية .
- نظرية النهاية المركزية تقول بأنه إذا أضفنا عدداً كبيراً كبراً كافياً من المتغيرات العشوائية المستقلة والمتماثلة في التوزيع إلى بعضها بأي طريقة فإن توزيع المجموع سيكون تقريباً هو التوزيع الطبيعي .

- منحنى دالة الاحتمال للتوزيع الطبيعي له خاصية شكل الجرس. ويتحدد شكل الجرس تماما لأي توزيع
- طبيعي خاص إذا علمنا الوسط الحسابي μ والانحراف المعياري σ لهذا التوزيع.
- تدل قيمة μ على مكان مركز الجرس، كما تدل σ على كيفية الانتشار.
- القيمـــة الصغـيرة لـ σ تعني أنــه لدينا جرس طويل مدبب، القيمة الكبيرة لـ σ تعني أن الجرس قصير
- ومفرطح.
- المساحة الكلية تحت كل جرس يجب أن تكون واحد صحيح.

العلاقة بين توزيع ذي الحدين والتوزيع الطبيعي

خصائص التوزيع الطبيعي		خصائص توزيع ذي الحدين
μ	الوسط	$\mu = NP$
σ^2	التباين	$\sigma^2 = NPq$
σ	الانحراف المعياري	$\sigma = \sqrt{NPq}$
$\frac{X-\mu}{\sigma}$	Z	$\frac{X-NP}{\sqrt{NPq}}$
$f(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$	الدالة	$P(X) = (^{N}X) P^{X} q^{N-X}$
• الوسط الحسابي • الانحراف المعياري	← يتحدد بـ →	• نسبة النجاح (p) • نسبة الفشل (1-p)=(q) • حجم المجتمع (N)

- إذا كانت N كبيرة (في توزيع ذي الحدين)
- وإذا كان كل من q و p غير قريبين من الصفر فإنه يمكن تقريب توزيع ذي الحدين بصورة جيدة إلى التوزيع المعياري الطبيعي.

$$Z = \frac{X - NP}{\sqrt{NPq}}$$

- يصبح التقريب أكثر جودة كلما زادت (N) حتى تصبح متطابقة في إلى مالانهاية ∞ .
- يعد التقريب جيداً إذا كان كل من Nq و $0.5\langle NP$

ملاحظات متعلقة بالتوزيع الطبيعي

- أولاً :إذا كانت X لها توزيع طبيعي، ووسطها الحسابي μ ، وانحرافها المعياري σ فإنه يمكن التعبير عنها : $X \underset{-}{\sim} N(\mu, \sigma)$
- ثانياً :للحصول على قيمة احتمال أن تقع X بين نقطتين X1 و X2 . فإن الاجراء العادي هو الحصول على تكامل الدالة بين X2 , X1 ، وهذا يتم باستعمال طريقة التكامل العددي .
- ثالثاً : هناك جداول توزيع طبيعي تعطي احتمال وقوع Z بين الصفر وأي قيمة موجبة (Z هي أكبر من صفر وأقل من 0.5)

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = X$$ القيمة المعيارية لـ

- لحساب احتمال وقوع X بين الوسط الحسابي وأي قيمة موجبة مثل X1 يجب الحصول على

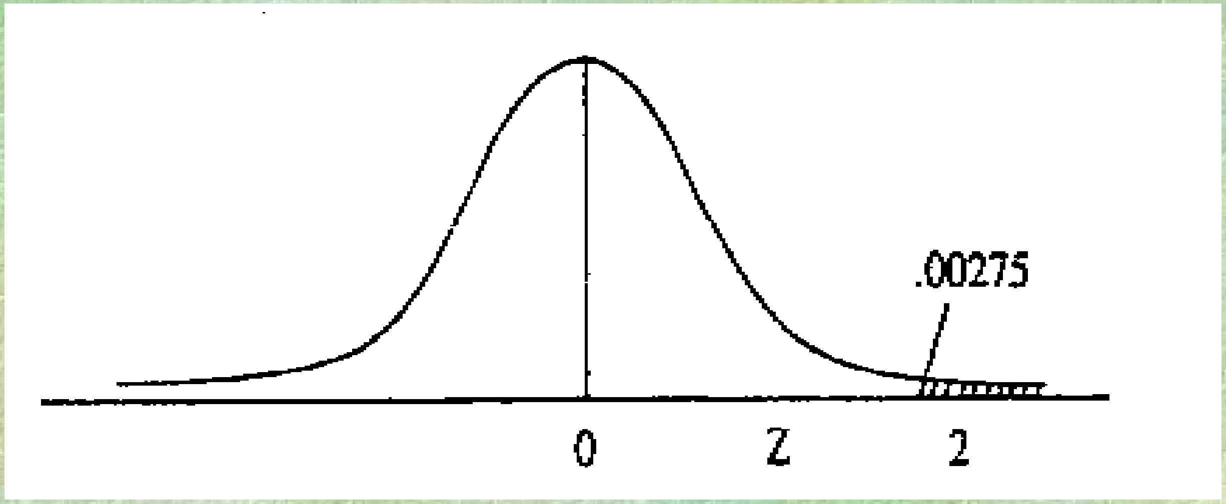
$$Z_1 = \frac{X_1 - \mu}{\sigma} = ؟؟$$

ثم من جداول التوزيع الطبيعي نعرف أن

$$P(\mu \leq X \leq X_1) = P(X \langle Z \langle Z_1)$$

- رابعاً: لحساب احتمال وقوع X بين قيمتين X1 و X2 نحسب القيم المعيارية للقيمتين، ثم نستعمل جداول التوزيع الطبيعي.

مثال : احتمال أن تكون قيمة Z أكبر من 2 .



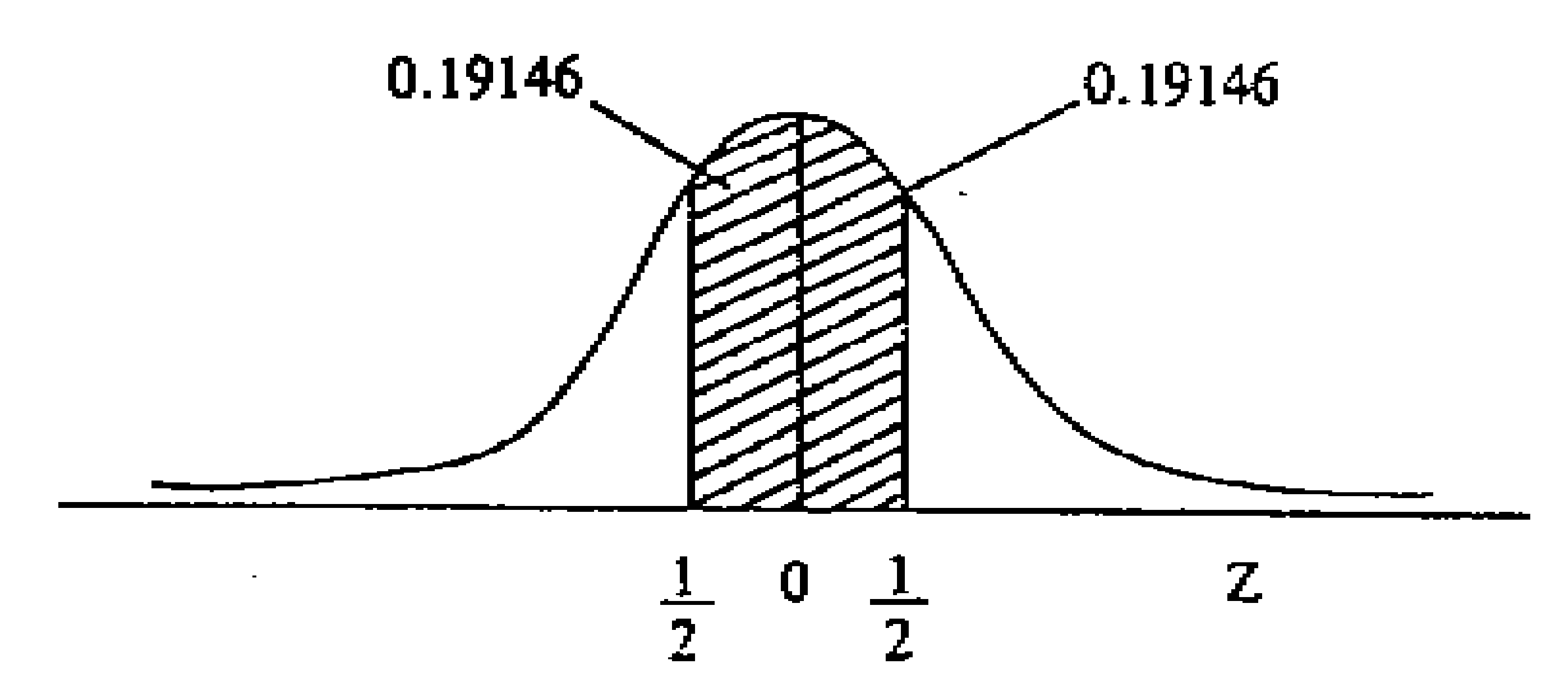
الحل : حيث أن احتمال أن تكون Z أقل من صفر = 0.5000 ومن الجدول احتمال Z في (0،2) = 0.47725 اذن احتمال أن تكون قيمة Z أكبر من 2 هي :

$$0.5000 - 0.47725 = 0.02275$$

مثال :

(أ) احتمال أن تقع Z بين صفر و 0.5.

(ب) احتمال أن تقع Z بين 0.5 و 0.5 - .



- الحل : من الرسم إعادة : المساحة المظللة بين 0 و 0.5 تمثل احتمال أن تقع Z بين 0 و 0.5، والمساحة المظللة إلى شمال 0 ويمين Z = - 0.5 هي احتمال أن تقع Z في الفترة (- 0.5، 0) . واحتمال أن تقع Z في الفترة (0، 0.5) = المساحة المقابلة لقيمة Z = 0.5 هي 0.19146 ، كذلك احتمال أن تقع Z في الفترة (- 0.5، 0) = 0.19146 اذن احتمال أن تقع Z في الفترة (-0.5, 0.5) = 0.19146 x 2 = 0.38292 وهي تتمثل بالمساحة المظللة في الرسم أعلاه .

توزيع t

- إذا كان متوسط العينة $\overline{X}$ مأخوذاً من توزيع طبيعي، فإن هذه العينة متوزعة توزيعاً طبيعياً .
- كما تكون العينة موزعة توزيعاً طبيعياً إذا كان حجم العينة كبيراً . وذلك في حالة كون الانحراف المعياري σ معروفاً .
- إذا استخدمت S لتقدير الانحراف المعياري، فإن التوزيع الاحتمالي في هذه الحالة سيكون توزيع t .

التوزيعات الاحتمالية

توزيع t	التوزيع الطبيعي
(1) الانحراف المعياري (σ) غير معروف، وبالتالي يؤخذ تقدير الانحراف المعياري S وهو $\sigma_{\bar{x}}$.	(1) الانحراف المعياري σ معروف $Z = \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$
(2) حجم العينة صغير أو أقل من 5% . وهو قيمة تقديرية. $t = \dfrac{\bar{X}-\mu}{S_{\bar{x}}} = \dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$	(2) إذا كان حجم العينة كبيرا (أكبر من 30) أو أكبر من 5% من حجم المجتمع، فإنه يتم تعديل $\sigma_{\bar{x}}$ لتصبح $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}}$ إذا أخذت العينة بدون ارجاع. أما إذا أخذت بارجاع فإن $\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$
(3) هناك معامل يحدد شكل التوزيع وهو درجات الحرية (n-1)	(3) $Z \sim N(0,1)$

- يقترب توزيع t من الطبيعي عند زيادة حجم العينة فعندما يكون $n \geq 30$ فإنهما يتساويان .

توزيع X2 (كاي تربيع)

- إذا كانت Z1 , Z2 ...Zn عينة عشوائية حجمها n من توزيع طبيعي معياري أي أن $ZI \sim N(0,1)$ فإن مجموع مربعات هذه القيم لها توزيع كاي تربيع أو X2 بدرجات حرية n .

$$X^2 = \sum Z_i^2$$

حيث

$$Z_i^2 = \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2}$$

- شكل المنحنى الاحتمالي يعتمد اعتماداً كلياً على درجات الحرية، فكلما زادت درجات الحرية اتجه المنحنى للتماثل، حيث عندما تكبر قيمة n فإننا يمكن أن نستخدم جداول التوزيع الطبيعي وذلك بأخذ قيمته $Z = \sqrt{2X_i^2} - \sqrt{2n-1}$.
- قيم كاي تربيع موجبة دائماً لأنها عبارة عن مجموع مربعات Zi .

- تستعمل جداول القيم الاحتمالية لتوزيع كاي، كما هو الحال في توزيع t .
- إذا كانت القيمـة X_1^2 لهـا توزيع كاي تربيع بدرجـات حريـة n2 فإن نسبة X_1^2/n_1 إلى X_2^2/n_2 لها توزيع F بدرجات حرية n1 ، n2 .

$$F_{n_1, n_2} = \frac{X_1^2/n_1}{X_2^2/n_2}$$

- استعمالات توزيع كاي تربيع :
  - تقدير فترة الثقة .
  - اختبارات تساوي التباين .
  - اختبار حسن الموافقة .
  - اختبار عدد النسب .

التقديرات واختبارات الفروض

تقدير معاملات المجتمع :

- عند استخدام بيانات العينة للدلالة على شيء ما عن المجتمع المأخوذه منه العينة، فإن الشيء المؤكد أننا لا نمتلك كل الحقائق عن المجتمع .
- فإنه لا بد من توفر طريقة عملية تمكننا من الحصول على درجة أعلى من الثقة في أن الحقيقة تقع ضمن حدود معينة .
- تعتمد درجة الثقة على طبيعة المجتمع الذي نحن بصدد تقدير بياناته أو معاملاته، ونحاول أن نقرر القيم العددية لمعالم المجتمع، على أساس بيانات العينة المتيسرة لدينا .

التقدير بنقطة

- هو عدد نحصل عليه من حسابات على بيانات العينة، يستخدم كتقريب لمعالم المجتمع. وأهم التقديرات العادية للنقطة:

1) تقدير الوسط الحسابي للمجتمع إذا كان غير معلوم، وذلك باعتبار أن وسط العينة $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$ فإن $\bar{x}$ هو تقدير لـ $\hat{\mu}$ أو مساوله.

2) تقدير نسبة المجتمع إذا كانت غير معلومة، إذ أن نسبة العينة $\hat{\rho}$ هي أفضل تقدير مناسب.

3) إذا كان تباين المجتمع σ^2 ممثلاً بـ $\frac{(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$ هو أفضل تقدير مناسب لتباين المجتمع غير المعروف، فإن الانحراف المعياري للعينة $\hat{\sigma}$ هو أفضل تقدير مناسب للانحراف المعياري للمجتمع غير المعروف انحرافه المعياري.

فترة التقدير

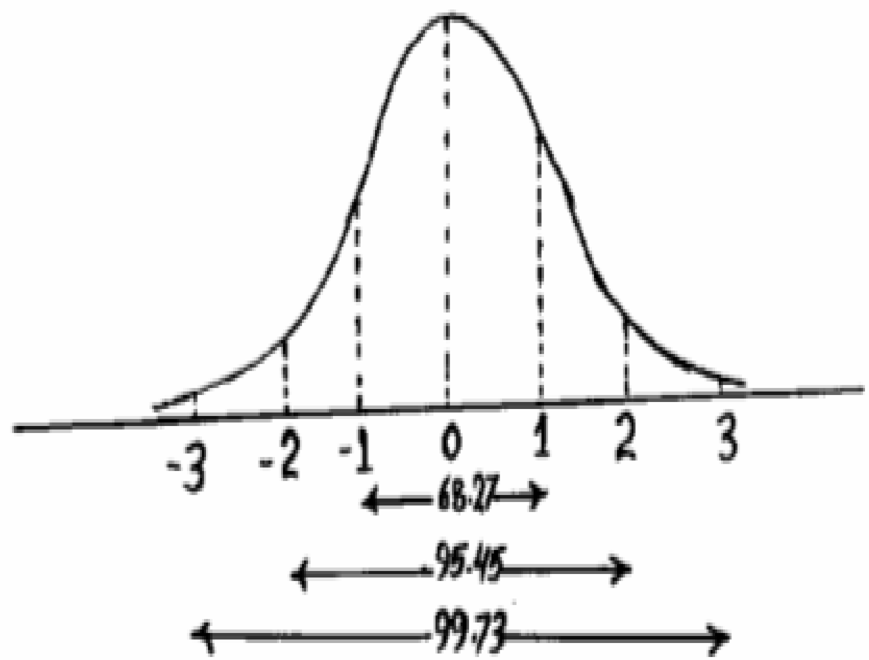
- هي فترة تتحدد بقيمتين نحصل عليهما من حسابات على قيم العينة المشاهدة، ويتوقع أن تحتوي على القيم الحقيقية للمعلمة غير المعروفة .
- باعتبار أن $\hat{\mu}$ تعبر عن الوسط الحسابي لتوزيع العينةٍ الاحصائية (الذي يعتبر صحيحاً في كثير من الاحصاءات، خصوصاً عندما يكون حجم العينة كبيراً أو يساوي أو أكبر من 30 مشاهدة) . لذلك يمكن أن نتوقع وقوع القيمة الفعلية للمعلمة في الفترات :

$$P_r(\mu_x - 3.0\sigma_x \langle X_i \langle \mu_x + 3.0\sigma_x) = 99.73\%$$

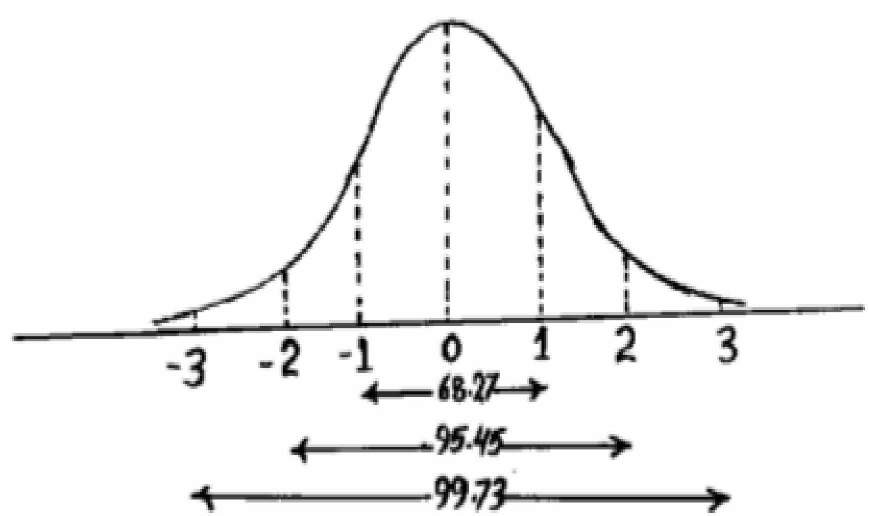
$$P_r(\mu_x - 1.96\sigma_x \langle X_i \langle \mu_x + 1.96\sigma_x) = 95.0\%$$

$$P_r(\mu_x - 1.64\sigma_x \langle X_i \langle \mu_x + 1.64\sigma_x) = 90.0\%$$

مستوى الثقة	%99.73	%99	%98	%96	%95.45	%95	%90	%80	%68.27	%50
معاملات الثقة (Z)	3.00	2.58	2.33	2.05	2.00	1.96	1.645	1.28	1.00	0.6745



مستوى الثقة	%99.73	%99	%98	%96	%95.45	%95	%90	%80	%68.27	%50
معاملات الثقة (Z)	3.00	2.58	2.33	2.05	2.00	1.96	1.645	1.28	1.00	0.6745



- تسمى هذه الفترات بفترات الثقة لتقدير ، كما يمكن تسميتها بحدود الطمأنينه .
- يمكن الحصول على معاملات الثقة من مستوى الثقة أو المعنوية . يصعب

مثال

- أراد كاتب حسابات أن يفحص مواعد استحقاق الديون للدفع، فوجد من التجربة أن مواعيد الدفع لها توزيع طبيعي تقريبي بانحراف معياري 10 أيام. وإذا ما كانت مواعيد الدفع طويلة فإن الشركة تكون مهددة في السيولة النقدية، وعليه فإن من المهم إيجاد تقدير دقيق لمتوسط مواعيد الدفع. ومن أجل ذلك أخذ المحاسب 25 فاتورة من السنة الماضية فأوجد المتوسط الحسابي $\overline{X}$ 44 يوماً. ولكن كيف يمكن أن يكون $\overline{X}$ دقيقاً كنقطة تقدير لمتوسط المجتمع μ .

الإجابة

- إن احتمال أن يأخذ متغير له توزيع طبيعي قيمة ضمن 1.96 انحرافات معيارية للوسط هو 95% أو 0.95 ولأننا نعرف أن لـ $\overline{X}$ توزيع طبيعي بوسط حسابي μ ، وانحراف معياري $\sigma/\sqrt{n}$ فإن :

$$P(-1.96\langle \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \langle +1.96) = 0.95$$

وعليه فإن :

$$P(-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \langle \overline{X}-\mu \langle 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 0.95$$

وحيث أن $\sigma = 10$ ، 25=n فإن $\sigma/\sqrt{n} = 2$ ، فتصبح المعادلة أعلاه

$$P(-3.92\langle \overline{X}-\mu \langle +3.92) = 0.95$$

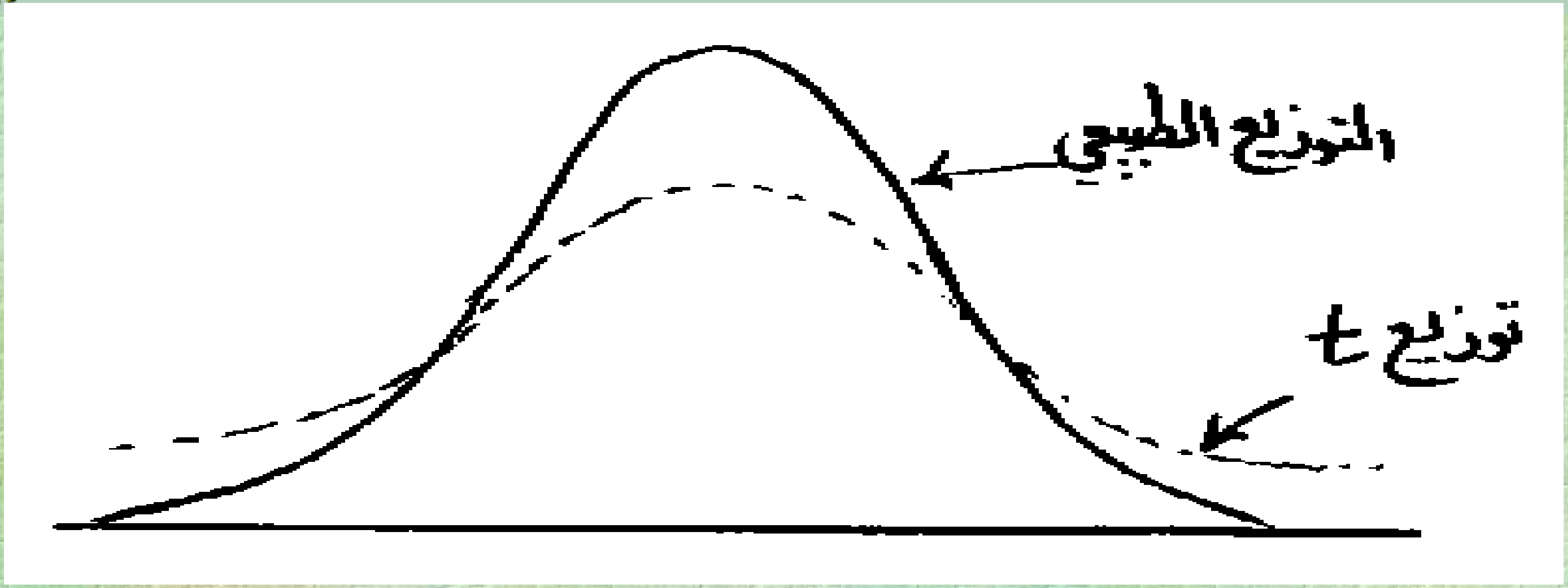
- أي أن كاتب الحسابات يشعر بثقة تامة ان متوسط العينة $\overline{X} = 44$ يختلف عن قيمة المجتمع μ بأقل من 3.92 يوماً . وقيمة الفرق تسمى بخطأ التقدير وتصبح فترة الثقة لـ μ بمستوى معنوية 95% على أساس العينة مكونة من 25 هي $P(\mu - 3.92 \langle \overline{X} \langle \mu + 3.92) = 0.95$. ويطلق على هذه الفترة $(\overline{X} - 3.92, \overline{X} + 3.92)$ 40.08,47.92,1 أنها فترة ثقة لـ μ، بمستوى معنوية 95%، وتسمى النقطة النهائية للفترة بجدود الثقة لـ μ .
- وكحالة عامّة، فإنه إذا كان للمجتمع توزيع طبيعي تقريبي فإن

$$P(\overline{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \langle \mu \langle \overline{X} + 1 - 96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 0.95$$

وتكون حدود الثقة في هذه الحالة كما يلي :

$$(\overline{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

- هذا في حالة المجتمعات ذات التوزيع الطبيعي، أي عندما يكون حجم العينة كبيرا .
- أما عندما تكون العينة صغيرة، فإن فترات الثقة تكون ضيقة للغاية، ولتجنب الخطأ الناتج عن تقدير الانحراف المعياري للمجتمع بالانحراف المعياري للعينة، فإنه يجب استخدام توزيع ستيودنت أو بما يعرف بتوزيع t، الذي يشبه التوزيع الطبيعي إلى حد كبير إلا أنه أكثر انتشارا أو تفرطحا من التوزيع الطبيعي، كما في الشكل أدناه



- وتعطي جداول t قيماً لتوزيع t المناظرة لما يسمى بدرجات الحرية (V)، وهي أقل من حجم العينة بـ 1 . ويتماثل t مع z لعدد لا نهائي من درجات الحرية، فإذا كانت (n)30 يفضل استخدام التوزيع الطبيعي. وتكون فترة الثقة للمتوسط باستخدام توزيع t كما يلي :

$$\left[\overline{X} - t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X} + t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

وتكون حدود الثقة هي :

$$\left(\overline{X} - t_{-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_{\frac{\alpha}{t}} \frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

وفي حالة التوزيع t ، فإن النقاط المناظرة للتوزيع الطبيعي هي :

درجات الحرية (v)	3	10	30	∞
قيمة (t)	3.18	2.23	2.04	1.96

وذلك بمستوى معنوية 95%.

مثال

- عينة عشوائية من 25 بمتوسط قدره 80، وانحراف معياري قدره $\sigma = 30$ أخذت من مجتمع قدره 1000 موزع توزيعا طبيعيا . أوجد فترات الثقة في حال:

(أ) 90% (ب) 95% (جـ) 99%

الحل: لمتوسط المجتمع غير المعروف، ولعينة أقل من 30 فإننا نستخدم توزيع t .

(أ) درجات الحرية = 24 , $t_{o.o5} = 1.711$

$$\mu = \overline{X} \mp t\frac{s}{\sqrt{n}} = 80 \mp 1.711(\frac{30}{\sqrt{25}})$$

$$= 80 \mp 10.266$$

$69.734 \le \mu \le 90.266$ بمستوى ثقة 90%

- وبنفس الطريقة يمكن حل الفروع الأخرى من المشكلة باستخراج $t_{0.025} = 2.064$ لدرجات حرية 24، و $t_{0.005} = 2.797$ لنفس درجات الحرية وتعويض هذه القيم بنفس الطريقة في (أ) .

اختبارات الفروض

- نتناول الآن موضوعاً مرتبطاً بتقدير المعلومات المجهولة لمجتمع ما من بيانات عينه مأخوذة من هذا المجتمع .
- ويتعلق الموضوع هنا بتحديد ما إذا كانت بيانات العينة تؤيد اعتقاداً معنيا أو فرضا معنيا عن المجتمع .
- لاستخدام بيانات العينة لاختبار فرض معين، فإن ذلك يتطلب قرب البيانات من الفرض، وذلك لتقرير ما إذا كان الاختلاف ناتجاً عن الصدفة أو عن صحة ذلك الفرض .
- لتوضيح فكرة الاختبار الاحصائي للفروض نتناول المثال التالي :

مثال

- تشتري شركة خمسة منتجات من مورد يقول أن يتوقع أن يكون عمر المنتج 1050 ساعة. وقد عاشت المنتجات عدد 964، 1082، 1136، 825، 863 ساعة، ولم تكن هذه النتائج مرضية بالنسبة للشركة. المطلوب إرسال شكوى للمورد تحلل النتائج وتقدم التوصيات. هل يمكن القول بصحة زعم المورد بمستوى معنوية 0.05؟
- نضع فرضاً هو أن $\mu = 1050$ مقابل الفرض أن $\mu \langle 1050$ ويسمى الفرض الأول بفرض العدم H0، والفرض الثاني بفرض البديل H 1 . وعليه فإن:

$$H_0 : \mu = 1050$$

$$H_1 : \mu \langle 1050$$

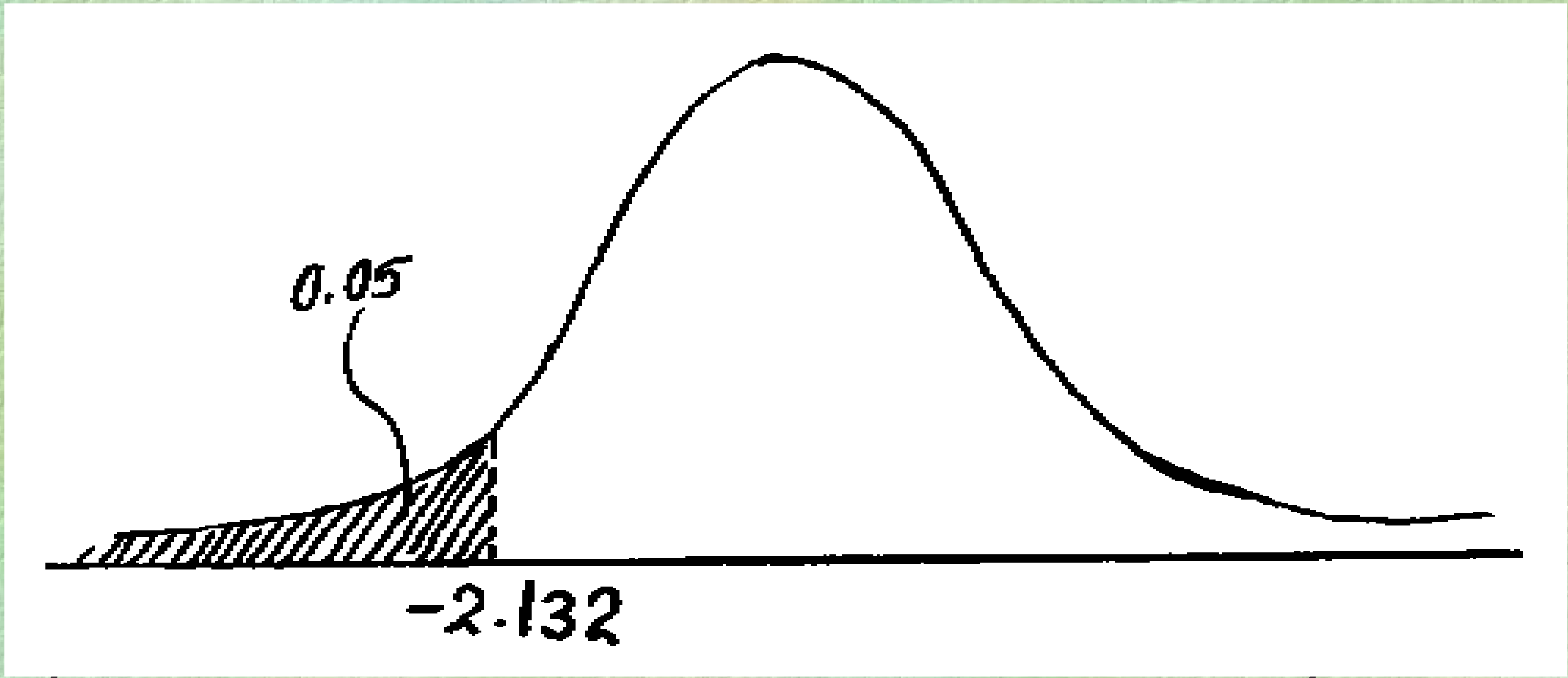
- المطلوب هو احتمال صغير لرفض H_0 (وبالتالي قبول H_1) إذا كان H_0 صحيحاً، ويسمى احتمال حدوث ذلك مستوى معنوية اختبار الفرض، وفي مثالنا أخذنا مستوى معنوية مقداره $\alpha = 0.05$ ، ولو حسبنا وسط العينة فإننا نجده أقل من 1050 ولكننا نريد أن نختبر إن كان أقل معنوياً بكثير، ومعنى معنوياً بالمفهوم الاحصائي أي غير محتمل الحدوث مصادفة. وتكون قيم وسط العينة المنخفضة عن 1050 بدرجة كافية لرفض الفرض H_0 مجموعة من القيم تسمى المنطقة الحرجة في الاختبار. وبما أن عدد مشاهدات العينة هو خمسة، فإنها تتبع توزيع t، حيث يمكن اشتقاقها:

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

- ومن البيانات المعطاة فإن n=5، $974 = \overline{X}$ ، $134.66 = \sigma$ ،

$66.02 = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ فإن $t = \frac{974 - 1050}{66.02}$

- وحيث أن الفرض البديل هو $\mu \langle 1050$ فإن الاختبار سيكون ذات ذيل واحد والمنطقة الحرجة ستكون جهة اليسار بمعنى أنها سالبة.
- وبذلك تكــون t الجدولية عندما تكون درجات الحرية (n-1) = 4 و $\alpha = 0.05$ هي 2.132-. وبمقارنة t الجدولية بـ t المحتسبة في الشكل التالي نجد أن t المحتسبة لا تقع في المنطقة الحرجة، وعليه فإننا نقبل H0 ، بمعنى أننا يمكن أن نجزم بصحة ادعاء المورد، وبالتالي لا يمكن رفع شكوى حول عدم صحة ادعاءاته.



- ولا يمكن أن نختلف مع المنتج في ادعائه، إلا اذا وقعت t في المنطقة الحرجة أي أن تكون

$$\frac{\bar{X}-1050}{66.02} < -2.13$$

$$\bar{X}(922)$$

- أما إذا كان العمر المتوسط للمنتجات أكبر من 922 فإن هذه البيانات تكون متفقة مع ما يقوله المنتج .
- الاخطاء التي يمكن الوقوع فيها :
  - بالعودة إلى المثال المذكور أعلاه، فإن احتكامنا إلى نتيجة العينة للتوصل إلى قرار نهائي حول رفض ادعاءات المنتج وقبولها ، فإن طريقة اتخاذ القرار قد تقودنا إلى الوقوع في نوعين من الخطأ :

- الخطأ الأول الذي يمكن أن نقع فيه هو رفض فرض كان من المفروض قبوله .
- الخطأ الثاني هو قبول فرض كان من المفروض رفضه .

- والطريقة الوحيدة للتقليل من نوعي الخطأ هو زيادة حجم العينة، ولكن ذلك يعتمد على الإمكانات المتاحة .

- مستوى المعنوية هو درجة احتمال الوقوع في الخطأ الأول، ويرمز له بالرمز ويحدد ذلك قبل سحب العينة.
- تستخدم مستويات المعنوية 0.1، 0.05، 0.01 .
- إذا استخدمنا 05 . كمستوى معنوية فمعنى ذلك أن هناك 5 فرص من كل مئة فرصة سوف نرفض فرضاً كان يجب قبوله، أي أننا واثقون من أننا سنتخذ القرار السليم بنسبة 95%، أي أن الفرض رفض عند مستوى معنوية 0.05 أي أن احتمال الخطأ هو 5%.

- يمكن استعمال اختبارات الفروض في مجالات مختلفة في حياتنا العملية، يمكن استخدامها من أجل اختبار معاملات خط الانحدار، كما تستعمل لاختبار الوسط الحسابي للمجتمع، للفروق بين متوسطات المجتمعات وغيرها من الاستخدامات .
- تناولنا في الاجراء السابق توزيع $\overline{X}$ (متوسط العينة) على أنه توزيع طبيعي عندما تكون العينة مأخوذة من توزيع طبيعي أو عندما يكون حجم العينة كبيراً، هذا في حال كون الانحراف المعياري σ معروفاً .

σ

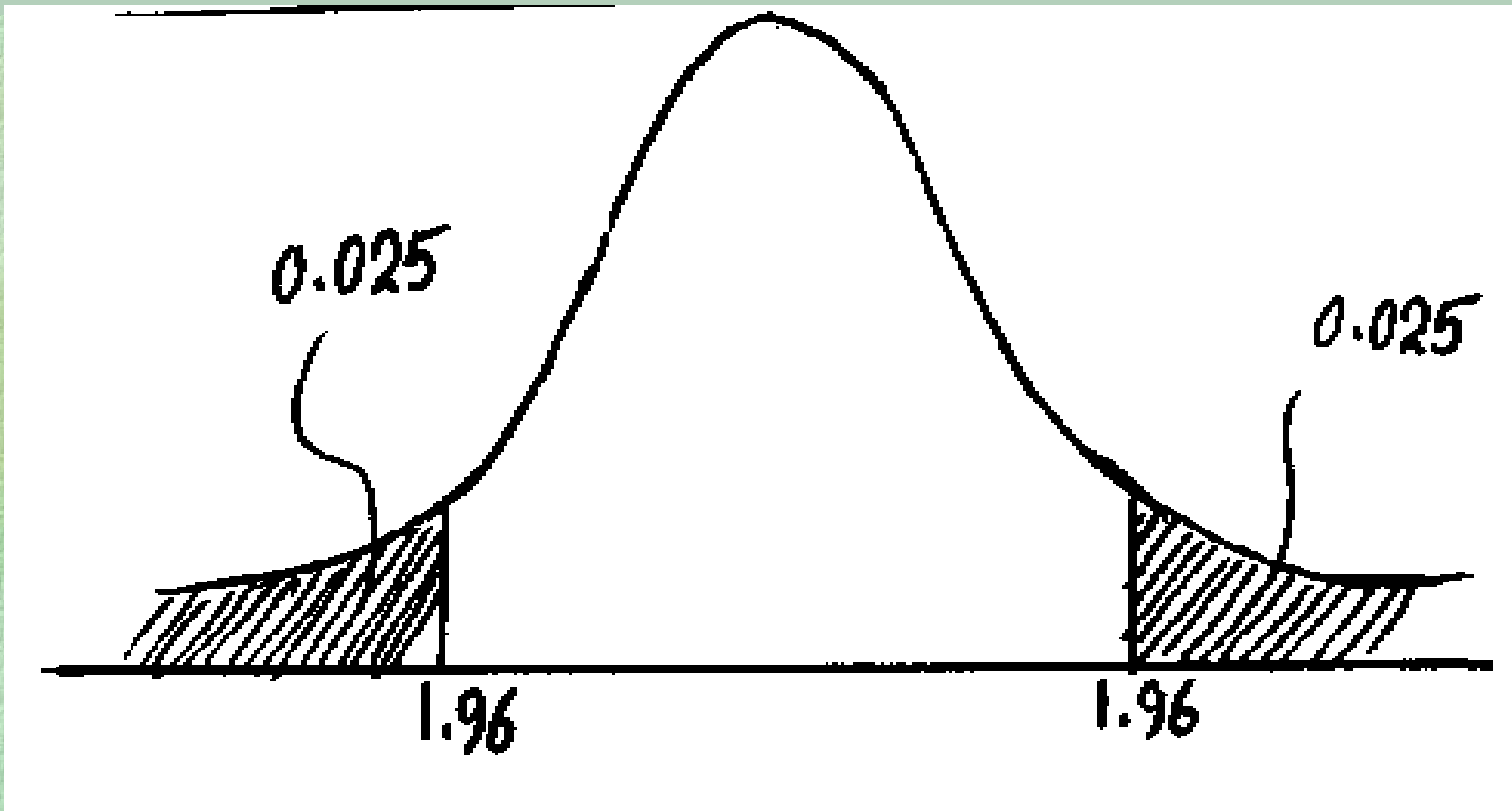
- لكن عند استعمال S لتقدير σ فإن التوزيع الاحتمالي سيكون t في هذه الحالة. ولاجراء اختبارات حول متوسط المجتمع فهناك حالتين:
- الأول: إذا كانت x موزعة توزيعاً طبيعياً أو إذا كان حجم العينة كبيراً وكان الانحراف المعياري معروفا فإن:
- لها توزيع طبيعي $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma \overline{X}}$
- الثانية: إذا كانت X موزعة توزيعاً طبيعياً، ولم يكن الانحراف المعياري معروفاً، فإن لها توزيع t بدرجات حرية (n-1).

- يتم تحديد المنطقة الحرجة بناء على صياغة الفرضين العدم (H0) والبديل (H1) .

1) فعندما تكون الصياغة

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

- فإن الاختبار سيكون ذو طرفين حيث تكون قيمة محددة يراد اختبارها ويتحدد مستوى معنوية $\alpha\%$ وتسمى قيمة $-Z_{\frac{\alpha}{2}}$ و $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ بالقيم الحرجة، حيث يتم قبول ورفض فرضية العدم بناء على موقع Z من هاتين القيمتين .

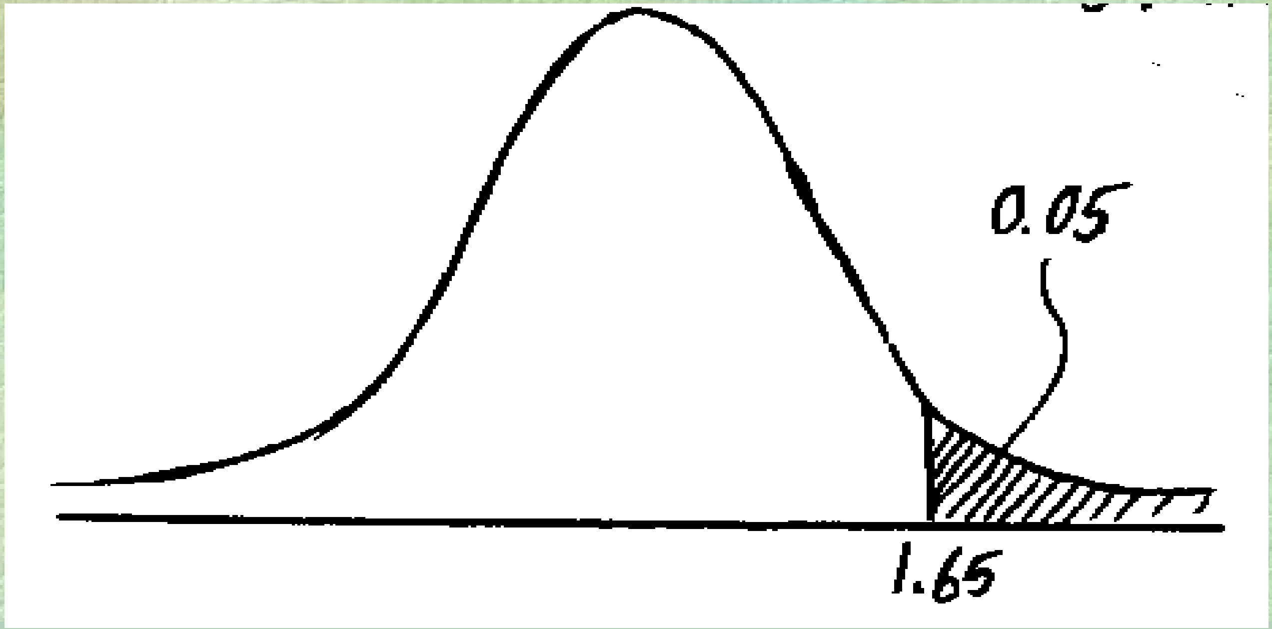


- اختبار ذو ذيلين، باستخدام التوزيع الطبيعي .

2) وعندما تكون الصياغة

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu \rangle \mu_0$$

- ففي هذه الحالة يكون الاختبار ذو طرف (ذيل) واحد من الطرف الأيمن، أي أن المنطقة الحرجة ستكون في الجهة اليمنى.

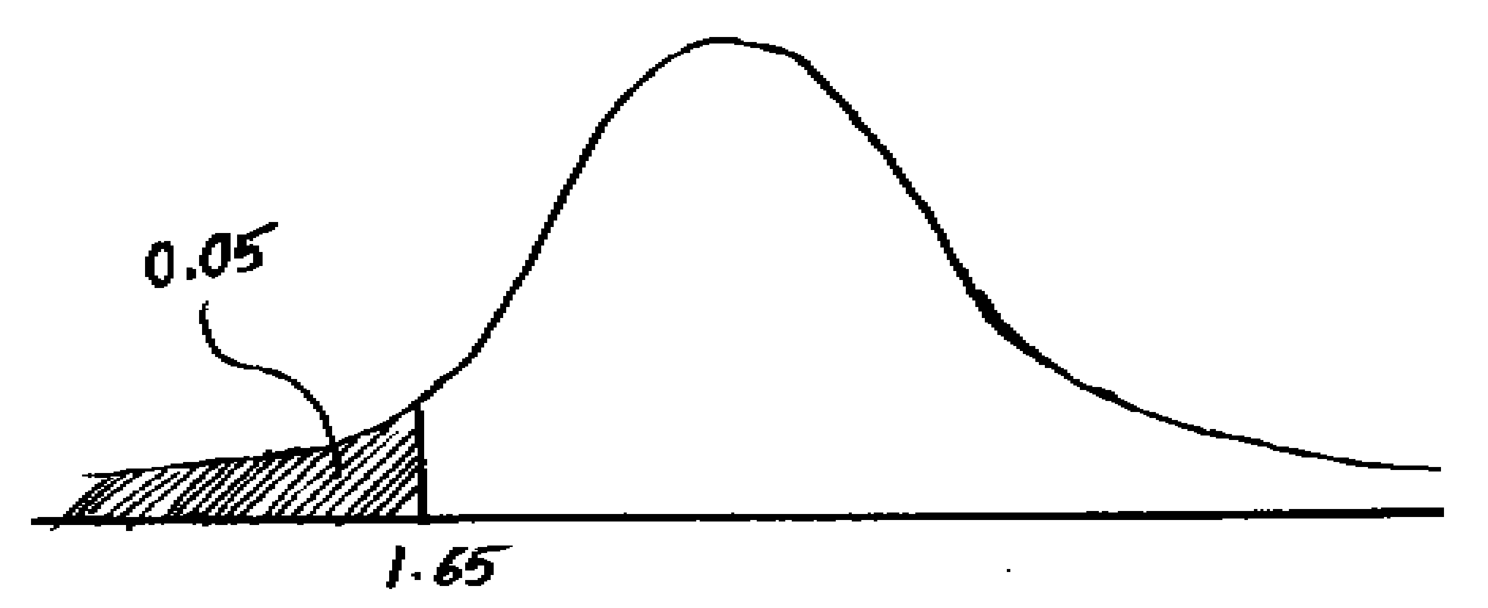


3) أما إذا كانت الصياغة

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \rangle \mu_0$$

فعندها يكون الاختبار ذو طرف واحد من الجهة اليسرى، أي أن المنطقة الحرجة ستكون في الجهة اليسرى .



▪ وتتحدد قيمة المنطقة الحرجة إذا كان التوزيع طبيعياً من الجدول التالي حسب مستوى المعنوية المطلوبة (α) وحسب حالة الاختبار.

مستوى المعنوية α	0.10	0.05	0.01	0.005	0.002
قيم Z الحرجة للاختبارات من طرف	-1.28 أو 1.28	-1.645 أو 1.645	-2.33 أو 2.33	-2.58 أو 2.58	-2.88 أو 2.88
قيم Z الحرجة للاختبارات من طرفين	-1.645 و 1.645	-1.96 و 1.96	-2.58 و 2.58	-2.81 و 2.81	-3.08 و 3.08

- أما إذا كان التوزيع t والذي يتحدد بناء على حجم العينة أو عدم معرفة الانحراف المعياري للمجتمع، فإن قيمة المنطقة الحرجة تتحدد من جدول توزيع t حسب درجة الحرية ومستوى المعنوية المطلوبة. وفي هذه الحالة تكون t المحتسبة $= \frac{\bar{X}-\mu}{S_{\bar{X}}}$.
- من أجل تسهيل مهمة الباحثين للقيام بعملية الاختبار الاحصائي، يمكن تلخيص عملية اختبار الفروض بستة خطوات أساسية :

- الخطوة الأولى : تحديد فرضية العدم H_0 وفرضية البديل H_1 .
- الخطوة الثانية : اختيار المستوى المعنـــوي المناســب للاختبار، وهــو احتمال رفض H_0 عنــدما يكــون صحيحاً .
- الخطوة الثالثة : اختيار مقياس احصائي مناسب للاختبار، سواء كان اختبار t أو التوزيع الطبيعي أو أي اختبار آخر .
- الخطوة الرابعة : تحديد المنطقة الحرجة، إما من التوزيع الطبيعي أو توزيع t حسب مستوى المعنوية ودرجات الحرية .

- الخطوة الخامسة: حساب المقياس الاحصائي المناسب وذلك من بيانات العينة.
- الخطوة السادسة: تقدير رفض أو قبول فرض العدم H_0 ، فإذا كان المقياس الاحصائي المحسوب (القيمة المحتسبة) يقع في المنطقة الحرجة يرفض الفرض H_0 ، أما إذا وقع خارج تلك المنطقة فإنه لا يمكن رفض الفرض H_0 بناء على بيانات العينة المدروسة.

الجداول الاحصائية

Statistical Tables

معامل ارتباط الرتب (اسبيرمان)

قيم معامل ارتباط الرتب عند مستويات معنوية

n	∝=.05	∝=.025	∝=01	∝=005
5	.900	-	-	-
6	.829	.886	.943	-
7	.714	.786	.893	-
8	.643	.738	.833	.881
9	.600	.683	.783	.833
10	.564	.648	.745	.794
11	.523	.623	.736	.818
12	.497	.591	.703	.780
13	.475	.566	.673	.745
14	.457	.545	.646	.716
15	.441	.525	.623	.689
16	.425	.507	.601	.666
17	.412	.490	.582	.645
18	.399	.476	.564	.625
19	.388	.462	.549	.608
20	.377	.450	.534	.591
21	.368	.438	.521	.576
22	.359	.428	.508	.562
23	.351	.418	.496	.549
24	.343	.409	.485	.537
25	.336	.400	.475	.526
26	.329	.392	.465	.515
27	.323	.385	.456	.505
28	.317	.377	.448	.496
29	.311	.370	.440	.487
30	.305	.364	.432	.478

ملحوظة : مستوى المعنوية = ∝ عدد = عدد المشاهدات

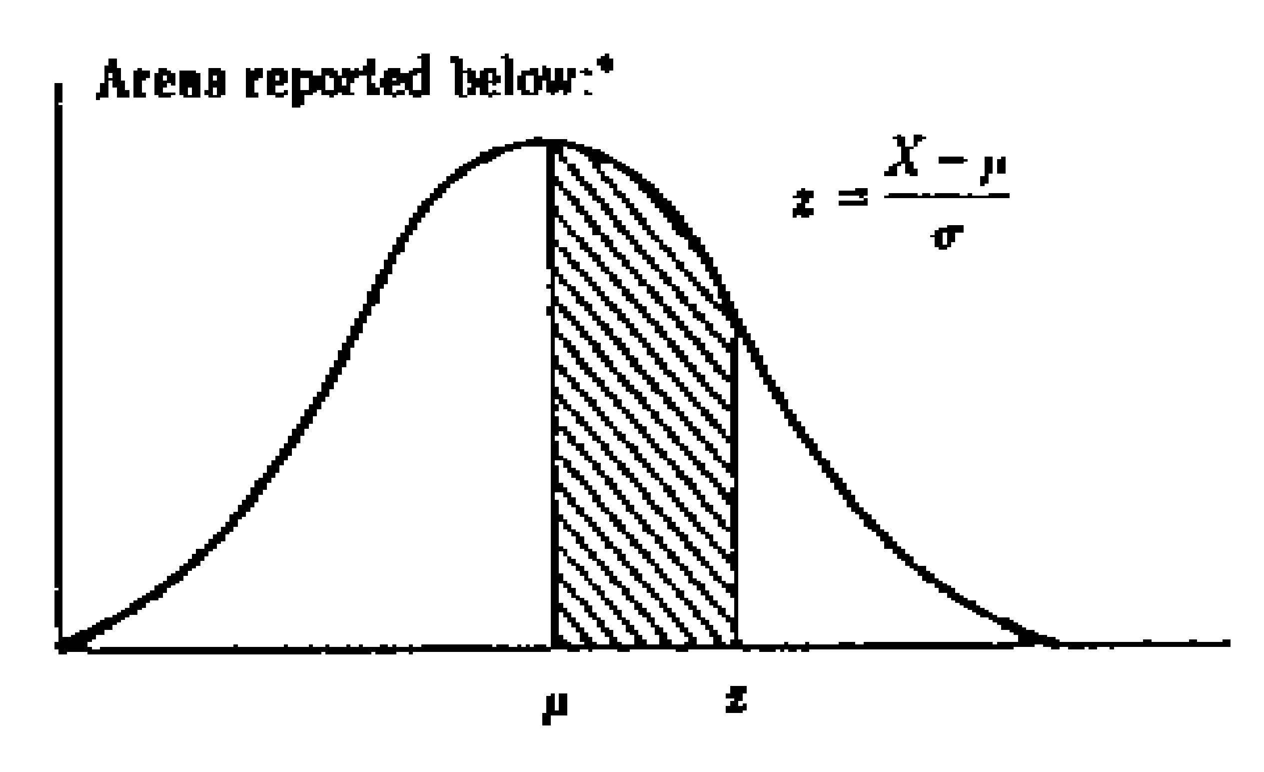
معامل ارتباط بيرسون

قيم معامل الارتباط عند مستويات معنوية مختلفة

n \ ∝	.1	.05	.02	.01	.001	n \ ∝	.1	.05	.02	.01	.001
1	.98769	.99692	.999507	.999877	.9999988	16	.4000	.4683	.5425	.5897	.7084
2	.90000	.95000	.98000	.990000	.99900	17	.3887	.4555	.5285	.5751	.6932
3	.8054	.8783	.93433	.95873	.99116	18	.3783	.4438	.5155	.5614	.6787
4	.7293	.8114	.8822	.91720	.97406	19	.3687	.4329	.5034	.5487	.6652
5	.6694	.7545	.8329	.8745	.95074	20	.3598	.4227	.4921	.5368	.6524
6	.6215	.7067	.7887	.8343	.92493	25	.3233	.3809	.4451	.4869	.5974
7	.5822	.6664	.7498	.7977	.8982	30	.2960	.3494	.4093	.4487	.5541
8	.5494	.6319	.7155	.7646	.8721	35	.2746	.3246	.3810	.4182	.5189
9	.5214	.6021	.6851	.7348	.8471	40	.2573	.3044	.3578	.3932	.4896
10	.4973	.5760	.6581	.7079	.8233	45	.2428	.2875	.3384	.3721	.4648
11	.4762	.5529	.6339	.6835	.8010	50	.2306	.2732	.3218	.3541	.4433
12	.4575	.5324	.6120	.6614	.7800	60	.2108	.2500	.2948	.3248	.4078
13	.4409	.5139	.5923	.6411	.7603	70	.1954	.2319	.2737	.3017	.3799
14	.4259	.4973	.5742	.6226	.7420	80	.1829	.2172	.2565	.2830	.3568
15	.4124	.4821	.5577	.6055	.7246	90	1726	.2050	.2422	.2673	.3375
						100	.1638	.1946	.2301	.2540	.3211

الجدول أدناه يعطي المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي القياسي (المساحة ما بين الوسط وقيمة Z)

Proportions of Area
for the
Standard Normal Distribution

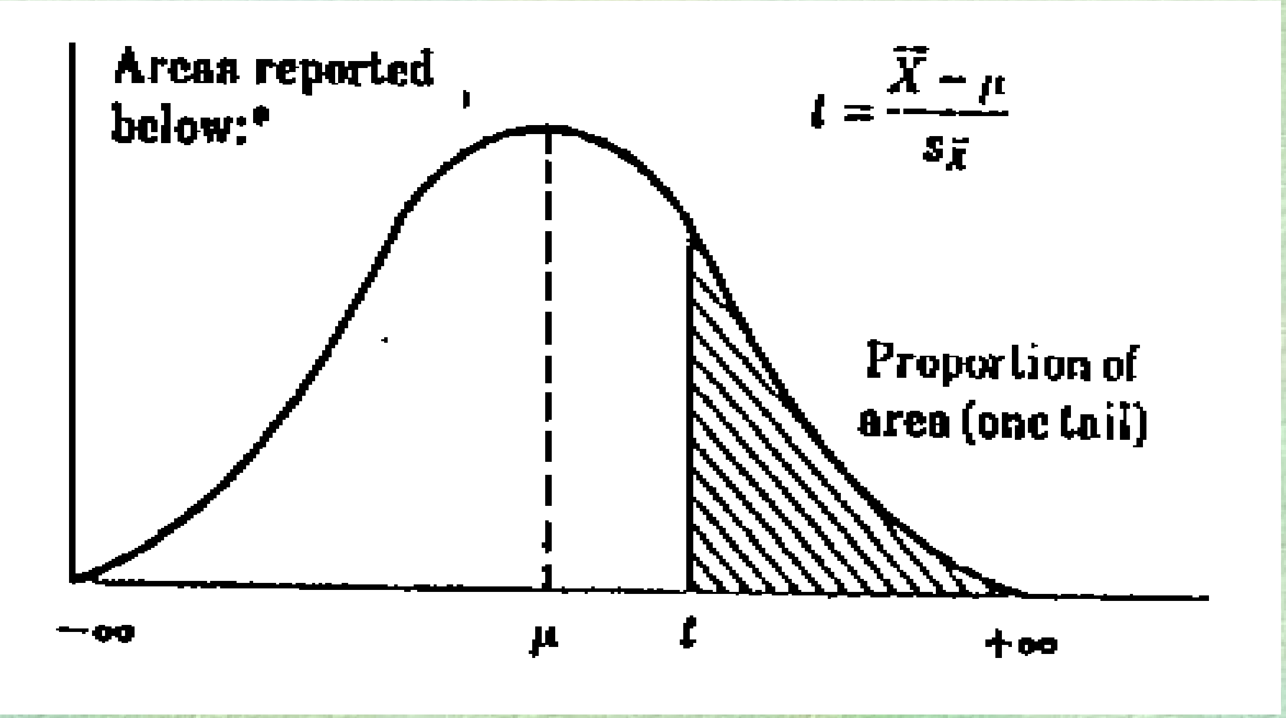


0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2518	.2549
0.7	.2580	2.612	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4014
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4983	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987									
3.1	.4997									
3.2	.4999									

Example: For z= 1.96, shaded area is 0.4750 out of the total area of 1.0000.

الجدول أدناه يعطي قيمة t ∝ المقابلة للمساحة المظللة وقيمتها ∝

Proportions of Area
for the t Distributions

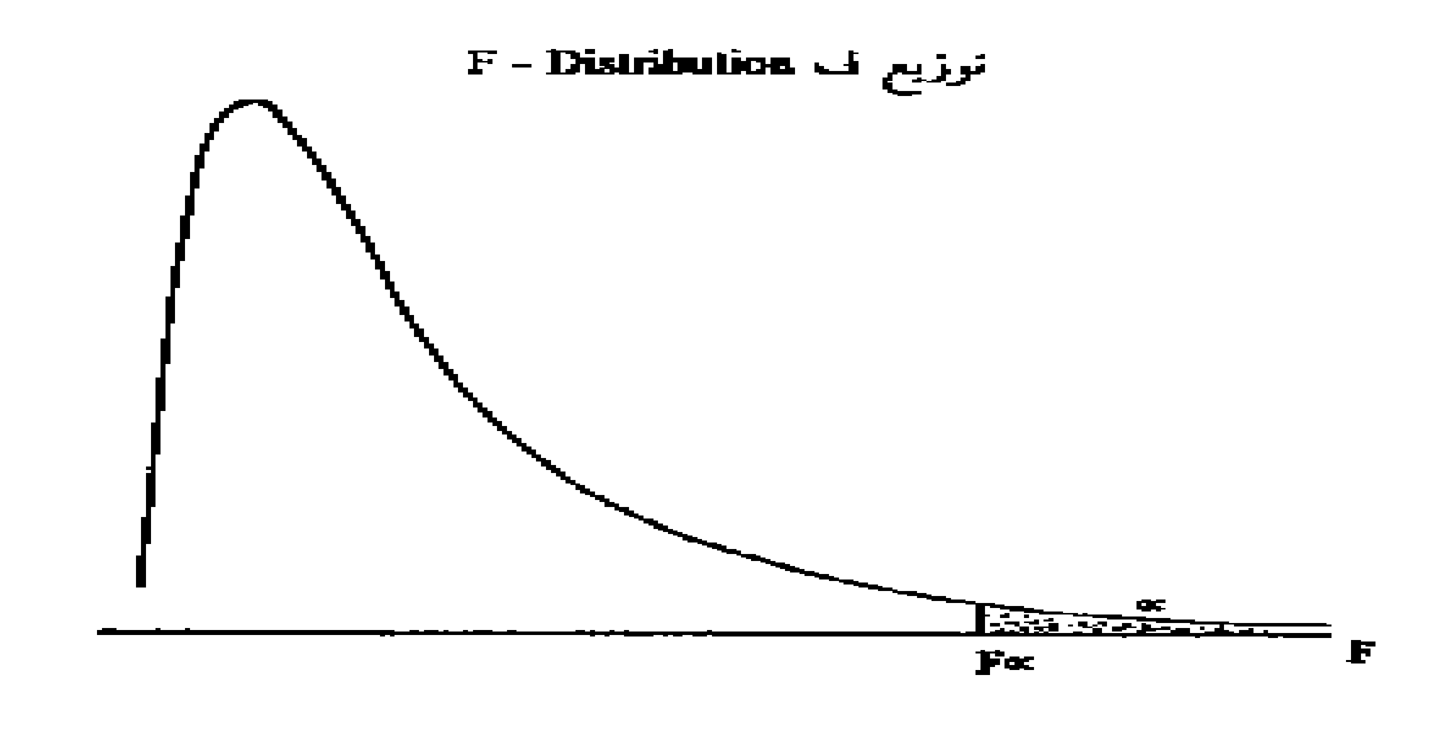


df	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898

df	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

* Example: For the shaded area to represent 0.05 of the area of 1.0, value t with 10 degrees of freedom is 1.812.

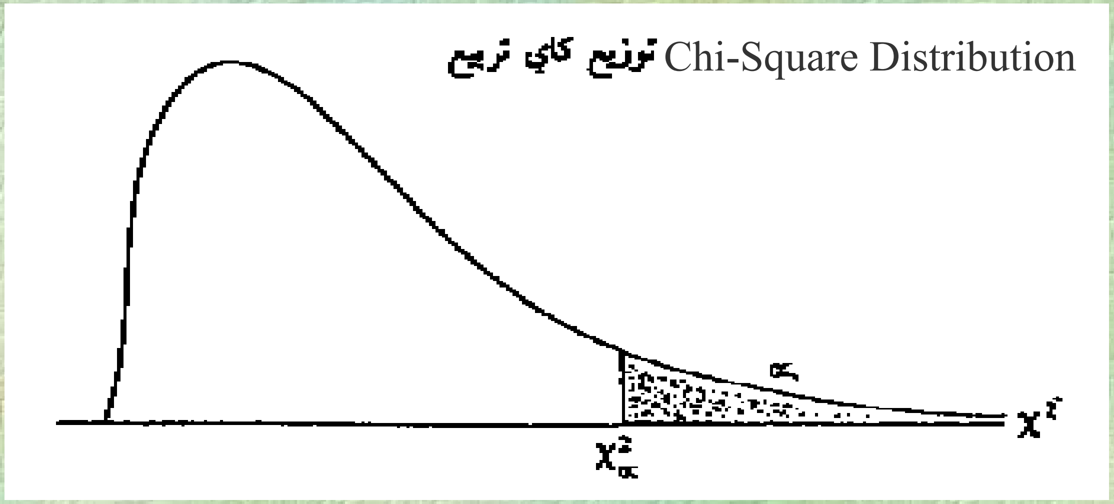
Source: From Table III of Fisher and Yates, Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research, 6th., 1974, published by Longman Group Ltd., London (previously published by Oliver & Boyd, Edinburgh), by permission of the authors and publishers.



الصف الأول $\propto = .05$ والصف الثاني $\propto = .01$

مثال $F_{5,7}\ (.05)=3.97$ و $F_{5,7}\ (.01) = 7.46$

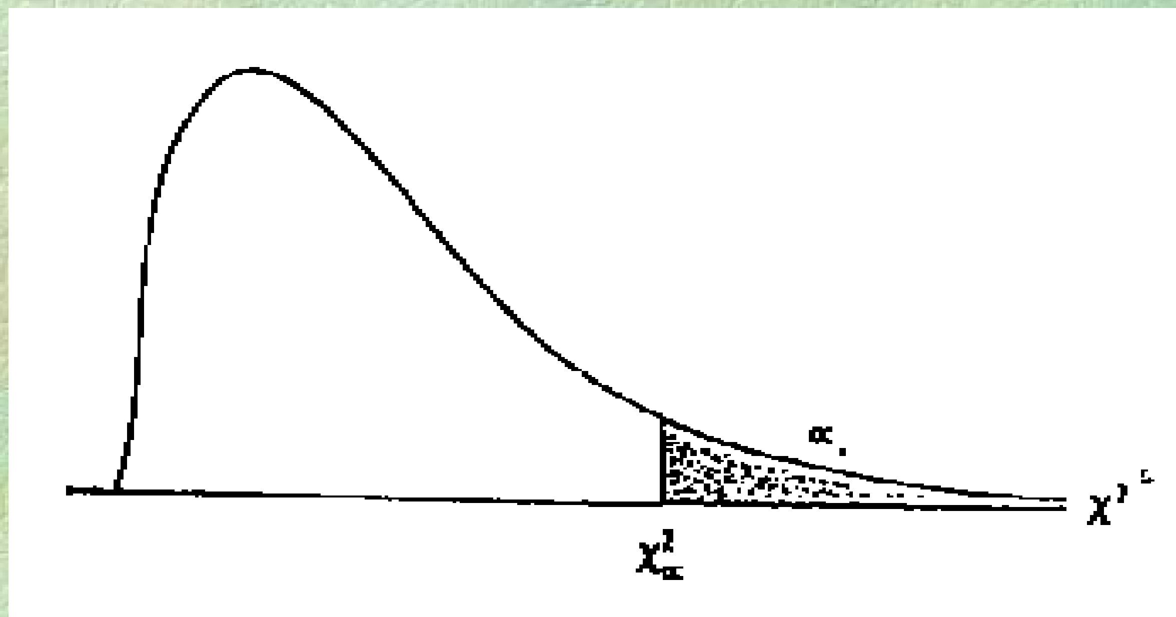
درجات حرية المقام	درجات حرية البسط											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
	4.052	4.999	5.403	5.625	5.764	5.859	5.928	5.981	6.022	6.056	6.082	6.106
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.36	19.37	19.38	19.39	19.40	19.41
	98.49	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39	99.40	99.41	99.42
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.88	8.84	8.81	8.78	8.76	8.74
	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.34	27.23	27.13	27.05
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.93	5.91
	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.54	14.45	14.37
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.78	4.74	4.70	4.68
	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.45	10.29	10.15	10.05	9.96	9.89
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.03	4.00
	13.74	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.79	7.72
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.63	3.60	3.57
	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	7.00	6.84	6.71	6.62	6.54	6.47
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.34	3.31	3.28
	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.19	6.03	5.91	5.82	5.74	5.67
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.13	3.10	3.07
	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.62	5.47	5.35	5.26	5.18	5.11
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.97	2.94	2.91
	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.21	5.06	4.95	4.85	4.78	4.71
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.86	2.82	2.79
	9.65	7.20	6.22	5.67	5.32	5.07	4.88	4.74	4.63	4.54	4.46	4.40
12	4.75	3.88	3.49	3.26	3.11	3.00	2.92	2.85	2.80	2.76	2.72	2.69
	9.33	6.93	3.95	5.41	5.06	4.82	4.65	4.50	4.39	4.30	4.22	4.16
13	4.67	3.80	3.41	3.18	3.02	2.92	2.84	2.77	2.72	2.67	2.63	2.60
	9.07	6.70	5.74	5.20	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	4.02	3.96
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.77	2.70	2.65	2.60	2.56	2.53
	8.86	6.51	5.56	5.03	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.86	3.80
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.70	2.64	2.59	2.55	2.51	2.48
	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.73	3.67
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.45	2.42
	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.61	3.55
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.62	2.55	2.50	2.45	2.41	2.38
	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.52	3.45
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.37	2.34
	8.28	6.01	5.09	4.28	4.25	4.01	3.85	3.71	3.60	3.51	3.44	2.37



• الجدول أدناه يعطي قيمة $X^2_\propto$ المقابلة للمساحة المظللة وقيمتها $\propto$

درجات الحرية	المساحة المظللة						
	.99	.98	.95	.90	.80	.70	.50
1	.03157	.03628	.00393	0.0158	.0642	.148	.455
2	.0201	.0404	.103	.211	.446	.713	1.386
3	.115	.185	.352	.584	1.005	1.424	2.366
4	.297	.429	.711	1.064	1.649	2.195	3.357
5	.554	.752	1.145	1.610	2.343	3.000	4.351
6	.872	1.134	1.635	2.204	3.070	3.828	5.348
7	1.239	1.564	2.167	2.833	3.822	4.671	6.346
8	1.646	2.032	2.733	3.490	4.594	5.527	7.344
9	2.088	2.532	3.325	4.168	5.390	6.393	8.343
10	2.558	3.059	3.940	4.865	6.179	7.267	9.342
11	3.053	3.609	4.575	5.578	6.989	8.148	10.341
12	3.571	4.178	5.226	6.304	7.807	9.034	11.340
13	4.107	4.765	5.892	7.042	8.634	9.926	12.340
14	4.660	5.368	6.571	7.790	9.467	10.821	13.339
15	5.229	5.985	7.261	8.547	10.307	11.721	14.339
16	5.812	6.614	7.962	9.312	11.152	12.624	15.338
17	6.408	7.255	8.672	10.085	12.002	13.531	16.338
18	7.015	7.906	9.390	10.865	12.857	14.440	17.338
19	7.633	8.567	10.117	11.651	13.716	15.352	18.338
20	8.260	9.237	10.851	12.443	14.578	16.266	19.337
21	8.897	9.915	11.591	13.240	15.445	17.182	20.337
22	9.542	10.600	12.338	14.041	16.314	18.101	21.337
23	10.196	11.293	13.091	14.848	17.187	19.021	22.337
24	10.856	11.992	13.848	15.659	18.062	19.943	23.337
25	11.524	12.697	14.611	16.473	18.940	20.867	24.337
26	12.198	13.409	15.379	17.292	19.820	21.792	25.336
27	12.879	14.125	16.151	18.114	20.703	22.719	26.336
28	13.565	14.847	16.928	18.939	21.588	23.647	27.336
29	14.256	15.574	17.708	19.768	22.475	24.577	28.336
30	14.953	16.306	18.493	20.599	23.364	25.508	29.336

مواصلة توزيع كاي ـــ تربيع



درجات الحرية	المساحة المظللة						
	.30	.20	.10	.05	.02	.01	.001
1	1.074	1.642	2.706	3.841	5.412	6.635	10.827
2	2.408	3.219	4.605	5.991	7.824	9.210	13.815
3	3.665	4.642	6.251	7.815	9.837	11.345	16.268
4	4.878	5.989	7.779	9.488	11.668	13.277	18.465
5	6.064	7.289	9.236	11.070	13.388	15.086	20.517
6	7.231	8.558	10.645	12.592	15.033	16.812	22.457
7	8.383	9.803	12.017	14.067	16.622	18.475	24.322
8	9.524	11.030	13.362	15.507	18.168	20.090	26.125
9	10.656	12.242	14.684	16.919	19.679	21.666	27.877
10	11.781	13.442	15.987	18.307	21.161	23.209	29.588
11	12.899	14.631	17.275	19.675	22.618	24.725	31.264
12	14.011	15.812	18549	21.026	24.054	26.217	32.909
13	15.119	16.985	19.812	22.362	25.472	27.688	34.528
14	16.222	18.151	21.064	23.685	26.873	29.141	36.123
15	17.322	19.311	22.307	24.996	28.259	30.578	37.697
16	18.418	20.465	23.542	26.296	29.633	32.000	39.252
17	19.511	21.615	24.769	27.587	30.995	33.409	40.790
18	20.601	22.760	25.989	28.869	32.346	34.805	42.312
19	21.689	23.900	27.204	30.144	33.678	36.191	43.820
20	22.775	25.038	28.412	31.410	35.020	37.566	45.315
21	23.858	26.171	29.615	32.671	36.343	38.932	46.797
22	24.939	27.301	30.813	33.924	37.659	40.289	48.268
23	26.018	28.429	32.007	35.172	38.968	41.638	49.728
24	27.096	29.553	33.196	36.415	40.270	42.980	51.179
25	28.172	30.675	34.382	37.652	41.566	44.314	52.620
26	29.246	31.795	35.563	38.885	42.856	45.642	54.052
27	30.319	32.912	36.741	40.113	44.140	46.963	55.476
28	31.391	34.027	37.916	41.337	45.419	48.278	56.893
29	32.461	35.139	39.087	42.557	46.693	49.588	58.302
30	33.530	36.250	40.256	43.773	47.962	50.892	59.703